CAMPO GRAVITATORIO FCA 12 ANDALUCÍA

1. a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razone las respuestas.

2. Se desea lanzar un satélite de 500 kg desde la superficie terrestre para que describa una órbita circular de radio 10 R_T.
a) ¿A qué velocidad debe lanzarse para que alcance dicha altura? Explique los cambios de energía que tienen lugar desde su lanzamiento hasta ese momento.
b) ¿Cómo cambiaría la energía mecánica del satélite en órbita si el radio orbital fuera el doble?
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.

3. Un meteorito de 400 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra, tiene una velocidad de 20 m s^{-1} a una altura h = 500 km sobre la superficie terrestre. Determine razonadamente:
a) El peso del meteorito a dicha altura.
b) La velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.

4. a) Energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra.
b) Deduzca la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R.

5. Se lanza un cohete de 600 kg desde el nivel del mar hasta una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule:
a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del cohete.
b) Qué energía adicional habría que suministrar al cohete para que escapara a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa altura.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.

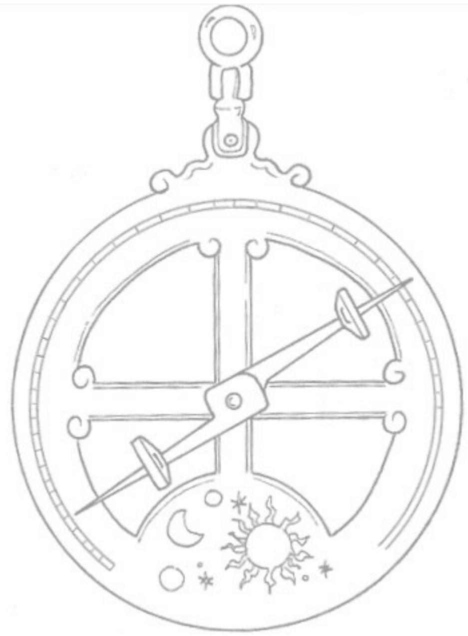
6. a) Enuncie las leyes de Kepler.
b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler y con la ayuda de un esquema, cómo cambia la velocidad de un planeta al describir su órbita elíptica en torno al Sol.

7. a) Explique las características del campo gravitatorio terrestre.
b) Dos satélites idénticos están en órbita circular alrededor de la Tierra, siendo r_1 y r_2 los respectivos radios de sus órbitas ($r_1 > r_2$). ¿Cuál de los dos satélites tiene mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tiene mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

Fco. González Funes

8. Una pequeña esfera de 25 kg está situada en el punto (0, 0) m y otra de 15 kg en el punto (3, 0) m.
a) Razone en qué punto (o puntos) del plano XY es nulo el campo gravitatorio resultante.
b) Calcule el trabajo efectuado al trasladar la esfera de 15 kg hasta el punto (4,0) m y discuta el resultado obtenido.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

9. a) Explique el movimiento de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra y deduzca la expresión de la velocidad orbital.
b) Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de 2 R_T a 3 R_T.

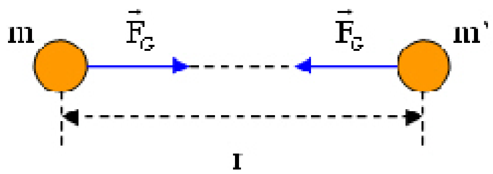


CAMPO GRAVITATORIO FCA 12 ANDALUCÍA

1.- a) La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada **constante de gravitación universal G,** vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

$$\vec{F}_G = -G\frac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r$$

es la ley de gravitación universal desarrollada por Newton.



La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m', pero dirigida en sentido contrario.

b) Al ser conservativa la interacción gravitatoria, se cumple:

$$W = -\Delta E_p$$

En una órbita semicircular el punto inicial y el final están a la misma distancia (R) del origen del campo, por lo tanto, sus energías potenciales son iguales y en consecuencia el trabajo realizado es cero.

Si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito, como allí, por definición, la energía potencial es cero, obtendríamos

$$W = -\Delta E_p = E_{p\,inicial} - E_{p\,final} = E_p(R) - E_p(\infty) = -\frac{Gmm'}{R}$$

2.- a) El enunciado de este ejercicio es confuso, al principio nos dice que se quiere poner un satélite de 500 Kg en órbita circular de radio $10R_T$, y en el apartado a se nos pregunta qué velocidad hemos de comunicarle en la superficie de la Tierra para que llegue a dicha altura (no para ponerlo en órbita) y se quede parado, es decir sin tener en cuenta la velocidad orbital, en este caso y aplicando la conservación de la energía mecánica obtenemos

$$E_m(R_T) = E_m(10R_T) \qquad E_p(R_T) + E_c(R_T) = E_p(10R_T)$$

$$-\frac{Gm_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{Gm_T m}{10R_T} \qquad v = \sqrt{\frac{18}{10}\frac{Gm_T}{R_T}} = 10634\,ms^{-1}$$

La energía cinética que se le comunica en la superficie se emplea en aumentar la energía potencial hasta que se queda parado a una altura de $9R_T$ de la superficie terrestre.

2.- b) La energía mecánica de un cuerpo de masa m en órbita alrededor de la Tierra de radio r, viene dada por la expresión

$$E_m = -\frac{Gm_T m}{2r}$$

Calculamos la energía mecánica en órbita de radio $10R_T$

$$E_m(10R_T) = -\frac{Gm_T m}{2\cdot 10R_T} = -1,57\cdot 10^9\ J$$

Calculamos la energía mecánica en órbita de radio $20R_T$

$$E_m(20R_T) = -\frac{Gm_T m}{2\cdot 20R_T} = -7,85\cdot 10^8\ J$$

Como vemos a $20R_T$ la energía mecánica es, en valor numérico, la mitad que a $10R_T$, pero como es negativa resulta ser el doble.

3.- a) Para calcular el peso del meteorito (fuerza con que lo atrae la Tierra) tenemos que calcular la intensidad gravitatoria a dicha altura

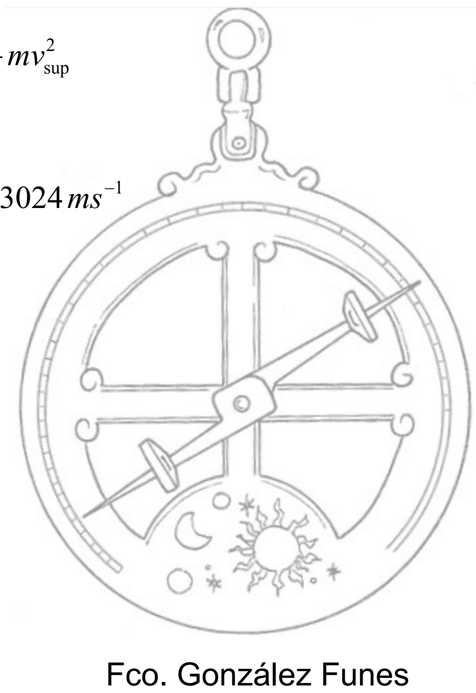
$$g = G\frac{m_T}{r^2} = G\frac{m_T}{(R_T+h)^2} = 8,48\,ms^{-2} \qquad P = mg = 3392\,N$$

b) Al no tener en cuenta la fricción, como la fuerza que actúa es conservativa, la energía mecánica del meteorito permanece constante

$$E_m(h) = E_m(sup) \qquad E_p(h) + E_c(h) = E_p(sup) + E_c(sup)$$

$$-\frac{Gm_T m}{R_T+h} + \frac{1}{2}mv_h^2 = -\frac{Gm_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_{\text{sup}}^2$$

$$v_{\text{sup}} = \sqrt{2Gm_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) + v_h^2} = 3024\,ms^{-1}$$



4.- a) Ver teoría

4.- b) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un cuerpo situado en la superficie del planeta para que abandone de manera definitiva el campo gravitatorio de este.

El cuerpo que se halla en la superficie del planeta con la correspondiente energía potencial

$$E_P = -G\frac{Mm}{R}$$

es dotado de la energía cinética necesaria para que llegue a una distancia infinita ($E_P = 0$) donde su velocidad y por consiguiente su energía cinética, se haga cero. El principio de conservación de la energía mecánica exige que

$$\frac{1}{2}mv_{escp}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 \quad \text{despejando} \quad v_{escp} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

5.- a) Calculamos la variación de la energía potencial del cohete

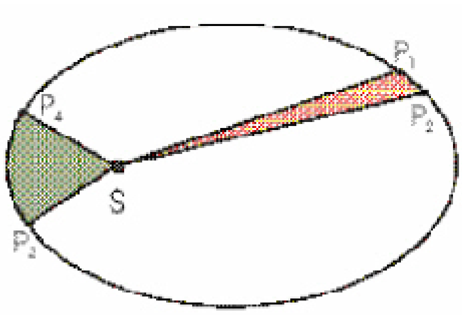
$$\Delta E_p = E_{p\,final} - E_{p\,inicial} = -\frac{Gm_Tm}{R_T+h} - \left(-\frac{Gm_Tm}{R_T}\right) = Gm_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = 5{,}97\cdot 10^9\ J$$

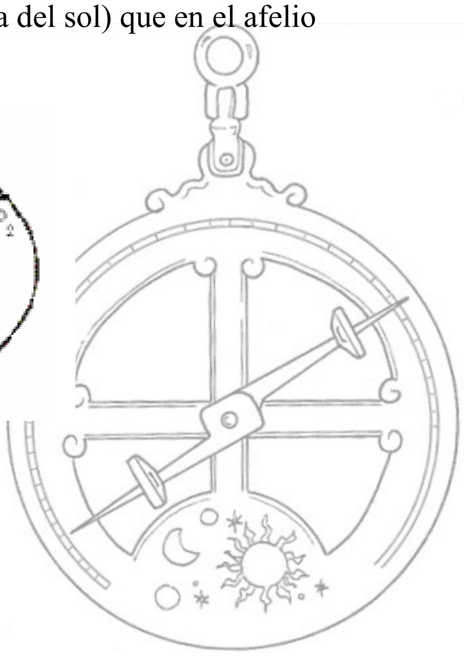
b) Si llamamos E a la energía que hemos de comunicarle al cohete situado a 1200 Km sobre la superficie terrestre para que llegue al infinito (E_p=0) con velocidad cero (E_c=0) y aplicamos la conservación de la energía mecánica obtenemos

$$E_m(h) = E_m(\infty) \qquad E_p(h) + E = 0 \qquad -\frac{Gm_Tm}{R_T+h} + E = 0 \qquad E = \frac{Gm_Tm}{R_T+h} = 3{,}17\cdot 10^{10}\ J$$

6.- a) Ver teoría

b) Según la segunda ley de Kepler las áreas verde y roja han de ser iguales y han de ser recorridas por el radio vector del planeta en el mismo tiempo. Ello explica que los planetas se muevan más rápidamente en el perihelio (cerca del sol) que en el afelio (lejos del sol)





7.- a) Ver teoría

7.- b) La velocidad orbital de un satélite viene dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R_T + h}}$$

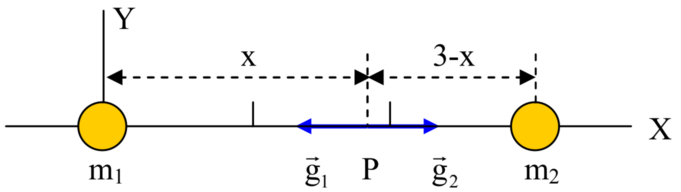
Por lo tanto se moverá a mayor velocidad el que esté situado a menor altura, es decir, el de radio r_2.

La energía mecánica de un satélite en órbita viene dada por la siguiente expresión:

$$E_m = -G\frac{m_T \cdot m}{2\left(R_T + h\right)}$$

Al ser negativa, será mayor la que tenga menor valor absoluto, por lo tanto tendrá mayor energía mecánica el satélite que esté situado a mayor altura, es decir, el de radio r_1.

8.- a) m_1 = 25 Kg el punto (0,0) y m_2 = 15 kg en el punto (3,0)



Como vemos en la figura el campo gravitatorio se anula en el punto P (más cercano a m_2 ya que esta es más pequeña), donde ambos campos se anulan al ser iguales en módulo y de sentido contrario. Si llamamos x a la distancia entre m_1 y P, la distancia entre m_2 y P será, $3-x$. Planteamos la ecuación de la igualdad entre módulos

$$g_1 = g_2 \qquad G\frac{m_1}{x^2} = G\frac{m_2}{(3-x)^2} \qquad \frac{25}{x^2} = \frac{15}{(3-x)^2}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y escogiendo la solución adecuada nos sale x = 1,69 m, por lo tanto el punto P será (1,69, 0). En los demás puntos del plano XY no se anulan los campos pues no son de sentidos contrarios.

b) Calculamos la energía potencial del sistema en la posición inicial, m_1 en el punto (0,0) y m_2 en el punto (3,0); distancia 3 m

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{d} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 25 \cdot 15}{3} = -8,34 \cdot 10^{-9}\ J$$

Calculamos la energía potencial del sistema en la posición final, m_1 en el punto (0,0) y m_2 en el punto (4,0); distancia 4 m

8.- b) (continuación)

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{d} = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 25\cdot 15}{4} = -6,25\cdot 10^{-9}\ J$$

El trabajo es

$$W = -\Delta E_p = E_p(inicial) - E_p(final) = -2,1\cdot 10^{-9}\ J$$

9.- a) La velocidad orbital de un satélite, es aquella que debe tener para que su órbita sea estable y ha de cumplirse que la fuerza gravitatoria que le ejerce la Tierra sea la fuerza centrípeta

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} \qquad \text{despejando} \qquad v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

siendo r el radio de la órbita medida desde el centro de la Tierra ($r = R_T + h$)

b) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un cuerpo situado en la superficie del planeta para que abandone de manera definitiva el campo gravitatorio de este.

El cuerpo que se halla en la superficie del planeta con la correspondiente energía potencial

$$E_P = -G\frac{m_T m}{R_T}$$

es dotado de la energía cinética necesaria para que llegue a una distancia infinita ($E_P = 0$) donde su velocidad y por consiguiente su energía cinética, se haga cero. El principio de conservación de la energía mecánica exige que

$$\frac{1}{2}mv_{escp}^2 + \left(-G\frac{m_T m}{R_T}\right) = 0 \qquad \text{despejando} \qquad v_{escp} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}$$

Teniendo en cuenta que cuando la altura es $2R_T$ la distancia al centro es $3R_T$ y que cuando la altura es $3R_T$ la distancia al centro es $4R_T$ ($r = R_T + h$), hallamos la razón entre las dos velocidades de escape

$$\frac{v_{escp}(h = 2R_T)}{v_{escp}(h = 3R_T)} = \sqrt{\frac{\dfrac{2Gm_T}{3R_T}}{\dfrac{2Gm_T}{4R_T}}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Como era de esperar, es mayor la velocidad de escape cuanto más cerca se esté de la superficie de la Tierra.