CAMPO GRAVITATORIO FCA 08 ANDALUCÍA

1. Los satélites meteorológicos son un medio para obtener información sobre el estado del tiempo atmosférico. Uno de estos satélites, de 250 kg, gira alrededor de la Tierra a una altura de 1000 km en una órbita circular.
a) Calcule la energía mecánica del satélite.
b) Si disminuyera el radio de la órbita, ¿aumentaría la energía potencial del satélite? Justifique la respuesta.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $R_T = 6400$ km ; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ kg

2. Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio 3 R_T.
a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.
b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6400$ km

3. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital de un satélite y deduzca razonadamente su expresión para un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra.
b) ¿Se pueden determinar las masas de la Tierra y del satélite conociendo los datos de la órbita descrita por el satélite? Razone la respuesta.

4. a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) Razone por qué la energía potencial gravitatoria de un cuerpo aumenta cuando se aleja de la Tierra.

5. Un satélite artificial de 1000 kg describe una órbita geoestacionaria con una velocidad de $3{,}1\cdot10^3$ m s^{-1}.
a) Explique qué significa órbita geostacionaria y determine el radio de la órbita indicada.
b) Determine el peso del satélite en dicha órbita.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6400$ km

6. a)Explique qué se entiende por velocidad de escape de la Tierra y deduzca razonadamente su expresión.
b) Suponiendo que la velocidad de lanzamiento de un cohete es inferior a la de escape, explique las características del movimiento del cohete y realice un balance de energías.

CAMPO GRAVITATORIO FCA 08 ANDALUCÍA

1.-a) m = 250 kg h = 10^6 m r = R_T + h = 7,4·10^6 m

La energía mecánica es la suma de la cinética y la potencial $E_M = E_C + E_P$

la energía potencial

$$E_P = -G\frac{Mm}{r}$$

la energía cinética $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ como la fuerza gravitatoria ejerce de fuerza centrípeta $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ despejando $mv^2 = G\frac{Mm}{r}$ sustituyendo en la ecuación de la energía cinética $E_C = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = G\frac{Mm}{2r}$

$$E_M = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{2r} = -G\frac{Mm}{2r} = -6,76\cdot 10^9\ J$$

b) la energía potencial es $E_P = -G\frac{Mm}{r}$, al disminuir r, el valor numérico de la energía potencial aumenta pero como es una magnitud negativa, su valor real disminuye.

2.-a) Si dividimos entre sí las intensidades del campo gravitatorio en la órbita y en la superficie

$$g_o = G\frac{M_T}{(3R_T)^2} \qquad g_s = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}} \qquad \frac{g_o}{g_s} = \frac{1}{9}$$

calculamos la relación entre ambos pesos

$$\frac{P_o}{P_s} = \frac{m\cdot g_o}{m\cdot g_s} = \frac{1}{9}$$

el peso del satélite es nueve veces menor en la órbita que en la superficie.

b) La fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite en órbita estable es la fuerza gravitacional

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} \qquad \text{despejando} \qquad v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

como r = 3 r_T obtenemos

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{3r_T}} = 4565,5\,ms^{-1}$$

2.-b) (continuación) Para que la órbita sea geoestacionaria el periodo orbital del satélite ha de ser el mismo que el periodo sidéreo de rotación terrestre (23 horas, 56 minutos). Calculamos el periodo del satélite aplicando la tercera ley de Kepler

$$T^2 = kr^3 \qquad \text{la k para la Tierra es} \quad k = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \quad \text{y como} \quad r = 3r_T \ \text{ nos queda}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{Gm_T}(3r_T)^3} = 26423\,s \quad (7\,h\ 21\min)$$

La órbita no es geoestacionaria.

3.-a) La velocidad orbital de un satélite, es aquella que debe tener para que su órbita sea estable y ha de cumplirse que la fuerza gravitatoria que le ejerce la Tierra sea la fuerza centrípeta

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} \qquad \text{despejando} \qquad v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

siendo r el radio de la órbita medida desde el centro de la Tierra ($r = r_T + h$)

b) Teniendo en cuenta que los datos orbitales del satélite son, su periodo (T) y el radio de la órbita (r). Aplicando la tercera ley de Kepler

$$T^2 = kr^3$$

podemos calcular el valor de la constante k y como esta viene dada por la ecuación

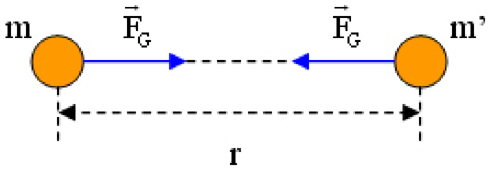
$$k = \frac{4\pi^2}{Gm_T}$$

despejando obtenemos la masa de la Tierra. Sin embargo, no podemos conocer la masa del satélite, pues los datos orbitales no dependen de ella.

4.-a) La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada **constante de gravitación universal G,** vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

$$\vec{F}_G = -G\frac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r$$

4.-a) (continuación) es la ley de gravitación universal desarrollada por Newton.



La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m', pero dirigida en sentido contrario.

b) la energía potencial es $E_P = -G\dfrac{Mm}{r}$, al aumentar r, el valor numérico de la energía potencial disminuye, pero como es una magnitud negativa, su valor real aumenta.

5.-a) Un satélite geoestacionario se caracteriza por estar situado en todo momento sobre el mismo punto del planeta, esto se consigue si su periodo de rotación es el mismo del planeta sobre el que orbita (en el caso de la Tierra el periodo de rotación del satélite sería de 24 h).

Para calcular la altura de la órbita partimos de la tercera ley de Kepler

$$T^2 = k \cdot r^3 \quad \text{sustituyendo k por su valor} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_T} \cdot r^3$$

despejamos r $\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2 \cdot G \cdot m_T}{4\pi^2}} = 42297752\, m \quad (42297\, km)$

en este ejercicio, también podría calcularse, partiendo de la ecuación de la velocidad orbital, ya que el enunciado nos da el valor de esta

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} \quad \text{despejando} \quad r = \frac{Gm_T}{v^2} = 41644121 m \qquad (41644\, km)$$

la diferencia entre ambos cálculos estriba en que la velocidad orbital está redondeada.

b) Calculamos la gravedad en la órbita geoestacionaria (r = 42297752 m)

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = 0,22\, ms^{-2}$$

como la masa del satélite es m = 1000 kg tenemos

$$P = mg = 220\, N$$

6.-a) Es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un cuerpo situado en la superficie de la Tierra para que abandone de manera definitiva el campo gravitatorio de esta.

El cuerpo que se halla en la superficie del planeta con la correspondiente energía potencial

$$E_P = -G\frac{m_T m}{r_T}$$

es dotado de la energía cinética necesaria para que llegue a una distancia infinita ($E_P = 0$) donde su velocidad y por consiguiente su energía cinética, se haga cero. El principio de conservación de la energía mecánica exige que

$$\frac{1}{2}mv_{escp}^2 + \left(-G\frac{m_T m}{r_T}\right) = 0 \quad \text{despejando} \quad v_{escp} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T}}$$

b) Es evidente que el cohete no saldrá del campo gravitatorio terrestre. Durante la ascensión y mientras dure el combustible, la energía cinética que le provoca la combustión se transforma en energía potencial. Cuando el combustible se agota, su velocidad va disminuyendo hasta quedar parado (siempre que no tenga una componente tangencial de velocidad, en cuyo caso entraría en órbita) con la máxima energía potencial, en este momento comienza la caída hacia la superficie de la Tierra durante la cual, la energía potencial se transforma en cinética.