1. Un satélite artificial de 500 kg orbita alrededor de la Luna a una altura de 120 km sobre su superficie y tarda 2 horas en dar una vuelta completa.
a) Calcule la masa de la Luna, razonando el procedimiento seguido.
b) Determine la diferencia de energía potencial del satélite en órbita respecto de la que tendría en la superficie lunar.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^{2}\ kg^{-2}$; $R_{Luna} = 1740$ km

2. a) Enuncie las leyes de Kepler y razone si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita.
b) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “la gravedad en la superficie de Venus es el 90% de la gravedad en la superficie de la Tierra y, en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal, G, el valor obtenido sería el 90% del medido en la Tierra”.

3. a) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico del signo.
b) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial? Justifique la respuesta.

4. La masa de Marte es 9 veces menor que la de la Tierra y su diámetro es 0,5 veces el diámetro terrestre.
a) Determine la velocidad de escape en Marte y explique su significado.
b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie de Marte, con una velocidad de 720 km h^{-1}?
$g = 10\ m\ s^{-2}$ $R_T = 6370$ km

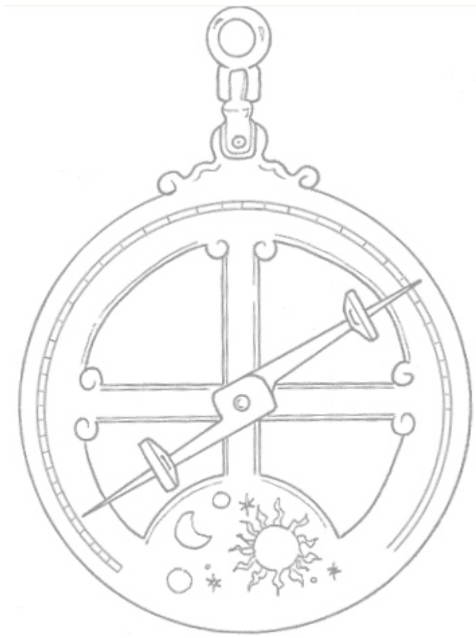
5. a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual? Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

6. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, deduzca la expresión de la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta.
b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. Razone con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo.

Fco. González Funes

CAMPO GRAVITATORIO FCA 07

7. Suponga que la masa de la Tierra se duplicara.
a) Calcule razonadamente el nuevo periodo orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permaneciera constante.
b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$km ; $R_{orbital\ Luna} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m



Fco. González Funes

CAMPO GRAVITATORIO FCA 07

1.- M_{SAT} = 500 Kg h = 120 Km

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N \cdot m^2}{Kg^2}$ R_L = 1740 Km

T = 2 h = 7200 s $r = R_L + h = 1{,}86 \cdot 10^6$ m

a) La tercera ley de Kepler aplicada a la Luna dice

$$T^2 = K_L \cdot r^3 \qquad K_L = \frac{T^2}{r^3} = 8 \cdot 10^{-12}$$

Como $K_L = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_L}$ $\qquad M_L = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot K_L} = 7{,}4 \cdot 10^{22}\, Kg$

b) La Energía potencial del satélite en la orbita viene dada por la expresión:

$$E_P = -G\frac{M_L \cdot M_{SAT}}{r} = -1{,}33 \cdot 10^9\ J$$

en la superficie lunar

$$E_P = -G\frac{M_L \cdot M_{SAT}}{R_L} = -1{,}42 \cdot 10^9\ J$$

$$\Delta E_P = E_{P\,órbita} - EP_{P\,spf} = 9 \cdot 10^7\ J$$

2.- a) Ver problema nº 9 de CAMPO GRAVITATORIO FCA 06
b) La afirmación es falsa, G como su propio nombre indica, es una constante universal, es decir su valor es el mismo para todo el universo. La gravedad de Venus es menor que la de la Tierra por el valor de su masa y de su radio.

3.- a) La energía cinética de una partícula no puede ser negativa, no tiene sentido ya que la ecuación de la energía cinética es

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

aunque el módulo de la velocidad puede ser negativo su cuadrado es positivo.
La energía potencial si es negativa, viene dada por la ecuación

$$E_P = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

El signo negativo proviene de la necesidad que se cumplan las condiciones de dicha energía y son que crece con la distancia y ha de ser cero en el infinito. Si fuera positiva no se cumplirían dichas condiciones.

CAMPO GRAVITATORIO FCA 07

3.- b) Si se trata de un campo conservativo y solo actúan las fuerzas del campo, si se cumple. Si actúan fuerzas no conservativas no se cumple.

4.- $M_M = \frac{M_T}{9}$ si el diámetro es la mitad, el radio también

$$R_M = \frac{R_T}{2} = 3185\, km = 3{,}185 \cdot 10^6\ m$$

a) Para determinar la velocidad de escape en Marte partimos de su ecuación

$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_M}{R_M}}$ pero como no nos dan ni G ni M_M, el valor de dicho

producto lo sustituimos por su equivalente despejado de la expresión de la gravedad

$G \cdot M_M = g_M \cdot R_M{}^2$ sustituyendo la expresión de la velocidad de escape se queda

$$v_{escape} = \sqrt{2 \cdot g_M \cdot R_M}$$

conocemos el radio de Marte, hemos de calcular g en su superficie

$$g_M = G\frac{M_M}{R_M{}^2} = G\frac{M_T/9}{(R_T/2)^2} = \frac{4}{9}G\frac{M_T}{R_T{}^2} = \frac{4}{9}g_T = 4{,}44\, m \cdot s^{-2}$$

sustituimos en la ecuación anterior y operamos

$$v_{escape} = \sqrt{2 \cdot g_M \cdot R_M} = 5318\, m \cdot s^{-1} = 5{,}32\, km \cdot s^{-1}$$

b) Al preguntarnos sobre la altura máxima alcanza por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie de Marte, con una velocidad de 720 km h^{-1} (200 m s^{-1}), está claro que en dicho punto su velocidad será cero, esto nos permite establecer la siguiente ecuación para el balance de energía

$E_C(inicial) + E_P(inicial) = E_P(final)$ es decir $E_C = \Delta E_P$

$$\frac{1}{2}m \cdot v_0{}^2 = -G\frac{M_M \cdot m}{r} - \left(-G\frac{M_M \cdot m}{R_M}\right)$$

eliminando m y sacando factor común obtenemos

$$\frac{1}{2}v_0{}^2 = G \cdot M_M\left(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{r}\right) = g_M \cdot R_M{}^2\left(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{r}\right)$$

Fco. González Funes

4.- b) (continuación) despejando v_0^2 y deshaciendo el paréntesis

$$v_0^2 = 2g_M \cdot R_M - \frac{2g_M \cdot R_M^2}{r} \qquad \text{despejando r y sustituyendo}$$

$$r = \frac{2g_M \cdot R_M^2}{2g_M \cdot R_M - v_0^2} = 3189511m \qquad \text{como} \qquad r = R_M + h$$

$$h = r - R_M = 4511m$$

Esta sería la forma correcta de resolver este apartado, aunque si considerásemos que la velocidad con la que lanzamos el cuerpo no es lo suficientemente elevada para que la altura que alcance el cuerpo sea relevante con respecto al radio de Marte, podríamos plantear la variación de la energía potencial como mgh

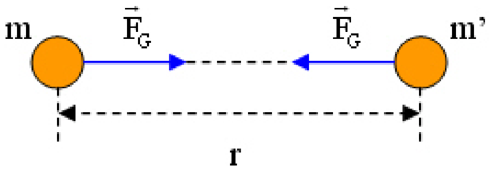
$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h \qquad h = \frac{v_0^2}{2g_M} = 4504\,m$$

como vemos el error cometido es muy pequeño.

5.- a) La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada **constante de gravitación universal G,** vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$$

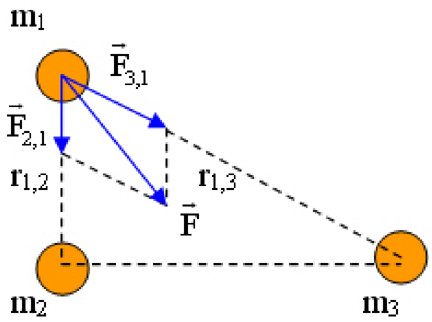
es la ley de gravitación universal desarrollada por Newton.



La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m', pero dirigida en sentido contrario.

b) Cuando tenemos un conjunto de varias masas la fuerza que actúa sobre una de ellas es igual a la resultante de las fuerzas que las demás ejercen sobre ella, consideradas individualmente.

5.- b) (continuación)



$$\vec{F} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1}$$

6.- a) Que un cuerpo salga de la influencia del campo gravitatorio del planeta significa que llegue a una distancia infinita ($E_P = 0$) y que su velocidad sea cero ($E_C = 0$), por lo tanto su energía mecánica sería cero. A la velocidad necesaria que hay que darle al cuerpo en la superficie del planeta para que eso ocurra se le llama velocidad de escape. Como el campo gravitatorio es conservativo, la energía mecánica se mantiene constante, en consecuencia, podemos plantear la siguiente ecuación

$$E_P(\text{superficie}) + E_C(\text{superficie}) = 0 \qquad \frac{1}{2} m \cdot v_{escape}^2 - G\frac{M \cdot m}{R} = 0$$

despejando $$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

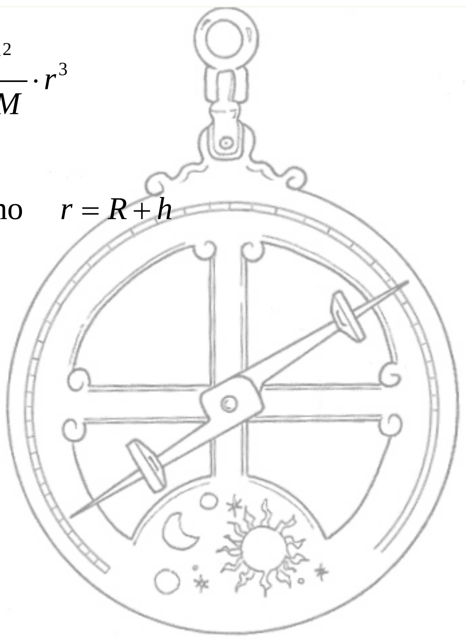
b) Un satélite geoestacionario se caracteriza por estar situado en todo momento sobre el mismo punto del planeta, esto se consigue si su periodo de rotación es el mismo del planeta sobre el que orbita (en el caso de la Tierra el periodo de rotación del satélite sería de 24 h).

Para calcular la altura de la órbita partimos de la tercera ley de Kepler

$$T^2 = k \cdot r^3 \quad \text{sustituyendo k por su valor} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3$$

despejamos r $$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}}$$ y como $r = R + h$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}} - R$$



CAMPO GRAVITATORIO FCA 07

7.- a) $M'_T = 2M_T$ $\qquad r = R_{orbital\,Luna} = 3{,}84 \cdot 10^8\ m$

si llamamos v’ a la nueva velocidad orbital de la Luna podemos calcularla partiendo de la igualación entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria

$$M_L \frac{v'^2}{r} = G\frac{M'_T \cdot M_L}{r^2} \qquad \text{despejando} \qquad v' = \sqrt{\frac{G \cdot M'_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot 2M_T}{r}} = 1443{,}7\,ms^{-1}$$

calculamos el periodo en las nuevas condiciones T’

$$T' = \frac{2\pi r}{v'} = 1671179{,}8\,s \quad (19{,}34\,días)$$

b) $M'_T = 2M_T$ $\qquad R'_T = 2R_T$

llamamos g’ a la gravedad de la Tierra en la nueva situación

$$g' = G\frac{M'_T}{R'^2_T} = G\frac{2M_T}{(2R_T)^2} = 4{,}9\,ms^{-2}$$